# Lec 30 微分方程习题课

注 助教注: 当我们求解 $y''+3y'-4y=\mathrm{e}^{4x}$ 时, 我们可以适当猜一下解的形式, 然后使用待定系数法即可.

**命题 30.1** ($f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型)

求解非齐次方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$ 时候, 可设特解为:

$$y^*=x^kP_m(x)e^{\lambda x}$$

其中:

$$\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ P_m(x)\text{为}m\text{次一般多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \text{当}\lambda\text{不是特征根}, \\ 1, & \text{当}\lambda\text{是特征单根}, \\ 2, & \text{当}\lambda\text{是特征重根}. \end{cases} \end{cases}$$

**命题 30.2** ($f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 型)

求解非齐次方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 时候, 可设特解为:

$$y^*=x^ke^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x+Q_m(x)\sin\omega x\right]$$

其中:

$$\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ m=\max\{l,n\},\ P_m(x)\text{和}Q_m(x)\text{分别为}m\text{次一般多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \text{当}\lambda+\omega i\text{不是特征根}, \\ 1, & \text{当}\lambda+\omega i\text{是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

对于 $y''+3y'-4y=\mathrm{e}^{4x}$, 我们可以设特解为 $y^*(x)=xC\mathrm{e}^{4x}$. 代入原方程得 $C=\dfrac{1}{5}$, 所以有一个特解 $y^*(x)=\dfrac{1}{5}x\mathrm{e}^{4x}$. 对比上一节例子中的计算过程可以知道结果无误.

尽管老师和课本都没有提到上面的命题, 但是考试的假设出解的形式是被允许的.

## 30.1 例题

**例 30.1** 求解 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$.

**解** 令 $x=\mathrm{e}^t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=2\mathrm{e}^{3t}$. 得到特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$, 因此 $y_1=\mathrm{e}^t,y_2=\mathrm{e}^{2t}$. 然后设特解形如 $y*(t)=A\mathrm{e}^{3t}$, 代入原方程得到 $A=1$, 因此通解为 $y=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{3t}$. 最后代入 $x=\mathrm{e}^t$ 得到通解为 $y=c_1x+c_2x^2+x^3$.

**例 30.2** $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$. 求 $f(x)$.

**解** 令 $y=f(x), y'=f'(x)=(\sin x)'-\left(x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'+\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)'=\cos x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, y''=-\sin x-f(x)=-\sin x-y$. 且 $f(0)=0, f'(0)=\cos 0-\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

$y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 解得 $\lambda_1=\mathrm{i}, \lambda_2=-\mathrm{i}$, 因此 $y_1(x)=\cos x, y_2(x)=\sin x$. 设特解 $y*(x)=x(A\cos x+B\sin x)$, 代入原方程得到 $A=\frac{1}{2}, B=0$, 因此通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$. 代入初值 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得到 $c_1=0, c_2=\frac{1}{2}$, 因此 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$.

**例 30.3** $y=y(x)$ 满足 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$, 且 $y(x)$ 的图像在 $(0,1)$ 上与 $y=x^2-x+1$ 相切. 求 $y(x)$.

**解** $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 解得 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$, 因此 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=\mathrm{e}^{2x}$. 设特解 $y*(x)=Ax\mathrm{e}^x$, 代入原方程得到 $A=-2$, 因此通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x$. 由相切条件知 $y(0)=1, y'(0)=(x^2-x+1)'|_{x=0}=-1$, 代入得到 $c_1=1, c_2=0$, 因此 $y=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$.

**例 30.4** 求解 $y^{(3)}-3y''+4y'-2y=0$.

**解** 特征方程为 $\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$, 解得 $\lambda_1=1, \lambda_2=1-i, \lambda_3=1+i$, 因此基解组为 $y_1(x)=\mathrm{e}^x, y_2(x)=\mathrm{e}^x\cos x, y_3(x)=\mathrm{e}^x\sin x$. 通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^x\cos x+c_3\mathrm{e}^x\sin x$.

## 30.2 提高题

**例 30.5** 求解微分方程组:$\begin{cases} y'_x=3y-2z \\ z'_x=2y-z \end{cases}$

**解** $y''_{xx}=3y'_x-2z'_x=3y'_x-4y+2z=3y'_x-4y+(3y-y'_x) \Rightarrow y''_{xx}-2y'_x+y=0$. 得 $y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$. $z(x)=\frac{1}{2}(3y-y'_x)=(C_1-\frac{1}{2}C_2)\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$.

**例 30.6** 求 $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$ 的通解.

**解** 特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$, 解得 $\lambda_1=\lambda_2=i, \lambda_3=\lambda_4=-i$, 因此基解组为 $y_1(x)=\cos x, y_2(x)=\sin x, y_3(x)=x\cos x, y_4(x)=x\sin x$. 通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x$.

✍ 作业 ex6.1:3(1)(2),4(5)(6);ex6.2:9(1)(2)(4).